线性代数

2022.02.22

- 杨金榜，地空楼 525
- 助教自我介绍
- 交作业与发作业时间：周二上课前后.（晚交一天到一个星期扣一半的分，晚交一个星期以上不得分）
- 点名

§1. 向量与复数

§1.1.1 向量及其表示

例：速度，位移，力

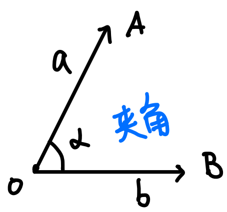
定义：既有大小，又有方向的量称为<u>向量</u>

表达方式：$\overrightarrow{AB}$，a, b, c "="

反向量（负向量）：大小相等，方向相反

向量的模长 $|a|$:= 向量的长度

- 零向量：$|a|=0$ （没有确定的方向）
- 单位向量：$|a|=1$



$0 \leq \alpha \leq \pi$

平行（$a \parallel b$）：方向相同或相反 $\alpha = 0, \pi$

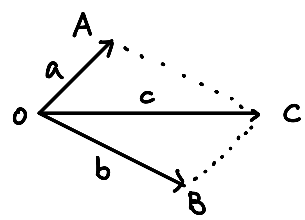
垂直或正交（$a \perp b$）：方向互相垂直 $\alpha = \frac{\pi}{2}$

- 零向量平行与任意向量（规定）

§1.1.2 向量的线性运算

· 速度、力的合成 $\xRightarrow{\text{抽象}}$ 向量的加法.

定义（向量的加法 - 平行四边形法则）

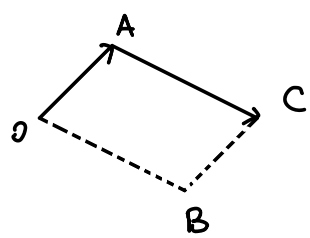


$\vec{OA} + \vec{OB} := \vec{OC}$

（其中 OACB 为平行四边形）

$a - b := a + (-b)$

引理（三角形法则）: $\vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$



$\vec{OA} + \vec{AC} \underset{\vec{OB} = \vec{AC}}{=} \vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OC}$

向量加法基本性质:

- $a + b = b + a$
- $a + (b + c) = (a + b) + c$
- $a + 0 = a$
- $a + (-a) = 0$

定义（向量数乘）: a 为向量，λ 为实数

$$\lambda a \begin{cases} \text{模长} = |\lambda| \cdot |a|; \\ \text{方向} \begin{cases} \text{与 } a \text{ 相同}, & \lambda \geq 0; \\ \text{与 } a \text{ 相反}, & \lambda < 0. \end{cases} \end{cases}$$

数乘基本性质：

- $1\cdot a = a$
- $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$
- $(\lambda+\mu)a = \lambda a+\mu a$
- $\lambda(a+b) = \lambda a+\lambda b$

记号： $a\neq 0$ $a^\circ := \dfrac{a}{|a|}$（即方向与 a 相同的单位向量）

§1.1.3. 向量的共线与共面.

共线 — 一组向量平行于某条直线

共面 — 一组向量平行于某个平面

命题 1.1.1 a,b 共线 $\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ s.t. $\lambda a+\mu b=0$

Pf: $\Rightarrow$): 不妨设 $a\neq 0 \Rightarrow b=|b|\cdot\dfrac{a}{|a|} \Rightarrow \dfrac{|b|}{|a|}a+(-1)b=0$

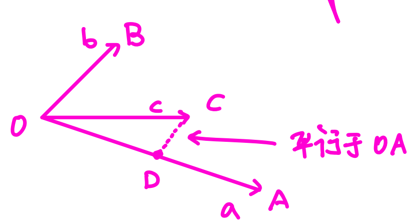
$\Leftarrow$): 不妨设 $\lambda\neq 0$, $\Rightarrow a=-\dfrac{\mu}{\lambda}b \Rightarrow a,b$ 共线

命题 1.1.2 a,b,c 共面 $\Leftrightarrow \exists(\lambda,\mu,\nu)\neq(0,0,0)$ s.t. $\lambda a+\mu b+\nu c=0$

Pf: $\Rightarrow$): 1° a,b,c 中有两向量共线. 不妨设 a,b 共线

$\Rightarrow \exists(\lambda,\mu)\neq(0,0)$ s.t. $\lambda a+\mu b+0\cdot c=0$

2° a,b,c 任两向量不共线.



$\Rightarrow \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$

$\Rightarrow \lambda a+\mu b+(-1)c=0$

$\Leftarrow$): 不妨设 $\nu \neq 0$

$$\lambda a + \mu b + \nu c = 0 \Rightarrow c = \left(-\frac{\lambda}{\nu}\right) a + \left(-\frac{\mu}{\nu}\right) b$$

$\Rightarrow$ c 为以 $\left(-\frac{\lambda}{\nu}\right) a$, $\left(-\frac{\mu}{\nu}\right) b$ 为边的平行四边形的对角线

$\Rightarrow$ a, b, c 共面.

定义 1.1.1 称 $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n$ 为向量 $a_1, \cdots, a_n$ 的线性组合

向量　　实数

定义 1.1.2 (线性相关) $a_1, \cdots, a_n$ 称为线性相关，若 $\exists (\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \neq (0, \cdots, 0)$ s.t. $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n = 0$

反之，则称为线性无关. (i.e. $\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$)

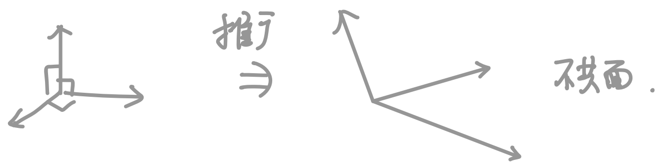
例：
- a 线性相关 $\Leftrightarrow$ $a = 0$
- a, b 线性相关 $\Leftrightarrow$ a, b 共线
- a, b, c 线性相关 $\Leftrightarrow$ a, b, c 共面.

例： $\forall a, b, c \Rightarrow a+b+c,\ a-b-c,\ a+2b+2c$ 线性相关.

Pf: $a-b-c = 3(a+b+c) - 2(a+2b+2c)$ □

§1.2 坐标系

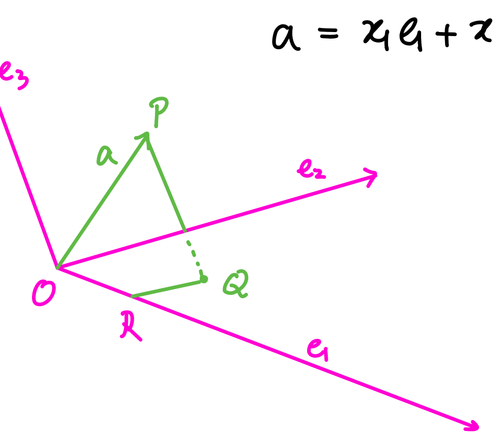
§1.2.1 仿射坐标系



定理1.2.1 设 e_1, e_2, e_3 不共面. 则 $\forall$ 向量 a $\exists!$ (x_1, x_2, x_3) s.t.

$$a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

Pf:



$PQ \parallel e_3$, $QR \parallel e_2$

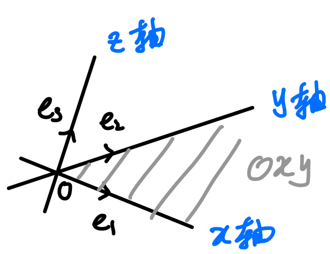
存在性:

唯一性:

定义1.2.1 称三个有序不共面向量 e_1, e_2, e_3 为空间的一组**基**. 称 (x_1, x_2, x_3) 为 $a = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ 在 e_1, e_2, e_3 下的**仿射坐标**或简称**坐标**

定义1.2.2 **仿射坐标系** = 点 O + 基 e_1, e_2, e_3 记为 $[O; e_1, e_2, e_3]$

$$\underset{\text{坐标原点}}{\uparrow}\qquad\qquad \underset{\text{坐标向量}}{\uparrow}$$



坐标平面: Oxy

Oyz

Ozx

推论（一一对应） 给定 $[O; e_1,e_2,e_3]$

$$\{P \mid \text{空间中的点}\} \xleftrightarrow{1:1} \{\text{向量}\} \xleftrightarrow{1:1} \{(x_1,x_2,x_3)\}$$

$$P \longmapsto \overrightarrow{OP} \longmapsto (x_1,x_2,x_3)$$

例：1) e_1,e_2,e_3 为基 $\Rightarrow$ $a=e_1+e_2+e_3$，$b=e_1-e_2+e_3$，$c=e_1+e_2-e_3$ 为基

2) 求 $d=a+2b-3c$ 在 e_1,e_2,e_3 下的坐标.

解1)：$xa+yb+zc=0 \Rightarrow (x+y+z)e_1+(x-y+z)e_2+(x+y-z)e_3=0$

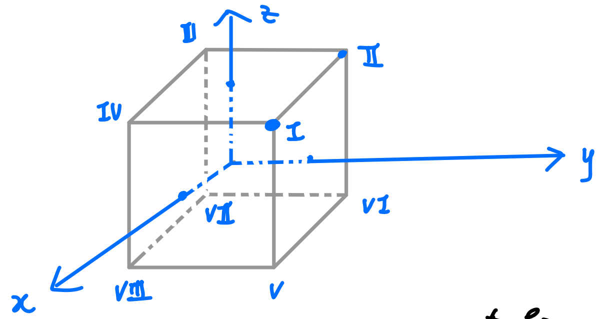
$$\Rightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z=0 \\ x+y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \checkmark$$

解2)：$d=a+2b-3c=(e_1+e_2+e_3)+2(e_1-e_2+e_3)-3(e_1+e_2-e_3)$

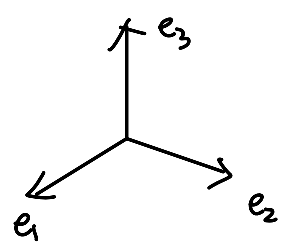
$=-4e_2+6e_3 \Rightarrow$ 坐标为 $(0,-4,6)$ □

八个卦限：I $(+,+,+)$，II $(-,+,+)$，III $(-,-,+)$，IV $(+,-,+)$

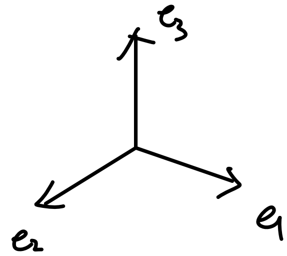
V $(+,+,-)$，VI $(-,+,-)$，VII $(-,-,-)$，VIII $(+,-,-)$



左(右)手仿射坐标系：



右



左

§1.2.2 向量的坐标运算

向量的运算 转化为 坐标运算

取定 $[O;e_1,e_2,e_3]$ $\quad \{向量\} \xleftrightarrow{1:1} \{坐标\}$

$\Rightarrow$ 用坐标 (x_1,x_2,x_3) 表示向量 $x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3$

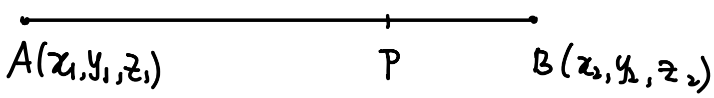
(计算公式)
$$\begin{cases} (x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)=(x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3) \\ \lambda(x_1,x_2,x_3) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3). \end{cases}$$

Pf: $(x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3) = (x_1e_1+x_2e_2+x_3e_3)+(y_1e_1+y_2e_2+y_3e_3)$

$= (x_1+y_1)e_1+(x_2+y_2)e_2+(x_3+y_3)e_3 = (x_1+y_1,\ x_2+y_2,\ x_3+y_3)$

similar for λa. □

例 1.2.2



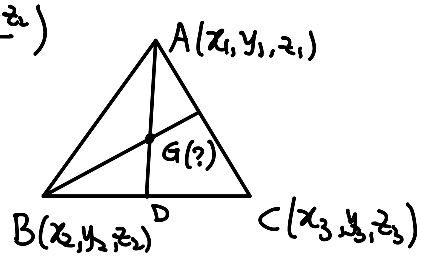
$\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB} \Rightarrow$ P坐标为？

解: $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{PB} \Rightarrow \overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP})$

$\Rightarrow \overrightarrow{OP}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OB}=\left(\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}\right)$ □

$\Rightarrow$ 中点 $\left(\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right)$

例 1.2.3 (重心坐标)



解: $\overrightarrow{OG} \overset{1.1.3}{\underset{1.2.2}{=}} \frac{2}{3}\overrightarrow{OD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$

$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \frac{y_1+y_2+y_3}{3},\ \frac{z_1+z_2+z_3}{3}\right)$ □